Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluții

BARAJUL al III-lea

Problemă. Fie $\sigma \in S_n, n \geq 2$ şi $f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$. Să se calculeze $S = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$.

Soluţie: $S = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} |\sigma(k) - k|$. Numărul permutărilor $\sigma \in S_n$, cu $\sigma(k) = j$, pentru k, j fixate, este $(n-1)!$. Aşadar,

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left((n-1)! \sum_{J=1}^{n} |j - k| \right) = (n-1)! \sum_{k,j=1}^{n} |j - k|.$$

Pentru calculul sumei $\sum_{k,j=1}^{n} |j - k|$, se face o organizare sub forma unui tabel.

Dar

$$\sum_{k,j=1}^{n} |j - k| = 2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \ldots + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{3}.$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot (n+1)! \cdot (n-1).$$

Răspuns: $S = \frac{1}{3} \cdot (n+1)! \cdot (n-1)$